Grupa A - Pismeni ispit iz Matematike, 04.09.2014.

Važno: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, obratiti pažnju na matematičku pismenost

1. Rješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0. \end{aligned}$$

2. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik

$$y = \ln \frac{2-x}{x^2}.$$

3. Odrediti integral $\displaystyle\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}\mathrm{d}x.$

4. Rješiti diferencijalnu jednačinu

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + x^3 + 3x^2 - 2x.$$

Grupa B - Pismeni ispit iz Matematike, 04.09.2014.

Važno: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, obratiti pažnju na matematičku pismenost

1. Rješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3. \end{aligned}$$

2. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik

$$y = \frac{e^x}{e^x - e^{-2x}}.$$

3. Odrediti integral $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2+4x}{x^4+x}\mathrm{d}x.$

4. Rješiti diferencijalnu jednačinu

$$(x-2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + 2(x-2)^3.$$

Grupa C - Pismeni ispit iz Matematike, 04.09.2014.

Važno: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, obratiti pažnju na matematičku pismenost

1. Rješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12. \end{aligned}$$

2. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik

$$y = \frac{3x^3-1}{(x+1)^3}.$$

3. Odrediti integral $\displaystyle\int \frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}\mathrm{d}x.$

4. Rješiti diferencijalnu jednačinu $\displaystyle\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy = 4x.$

Grupa D - Pismeni ispit iz Matematike, 04.09.2014.

Važno: Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom, obratiti pažnju na matematičku pismenost

1. Rješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3. \end{aligned}$$

2. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik

$$y = \frac{e^x}{e^x - e^{-2x}}.$$

3. Odrediti integral $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2+4x}{x^4+x}\mathrm{d}x.$

4. Rješiti diferencijalnu jednačinu

$$(x-2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + 2(x-2)^3.$$

Zadaci su skinuti sa stranice ff.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

#) Rješiti sistem jednačina

$$2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8$$
$$4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9$$
$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7$$
$$x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 .$$

Rj.-upute

Sistem rješimo Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Sistem ima tačno jedno rješenje

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

$x_3 = 1$

Ispitati f-ju i nacrtati njen grafik $\quad y=\dfrac{3x^3-1}{(x+1)^3}$.

Rj. – upute

DEFINICIONO PODRUČJE

$\mathcal{D}: x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$

PARNOST (NEPARNOST), PERIODIČNOST

$\mathcal{D}$ nije simetrično pa f-ja nije ni parna ni neparna.
F-ja nije periodična.

NULE, PRESJEK SA Y-OSOM, ZNAK

Nula f-je je $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};0\right)$.

Presjek sa y-osom je $(0;-1)$

x	$(-\infty,-1)$	$\left(-1,\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}},+\infty\right)$
Y	$+$	$-$	$+$

znak f-je

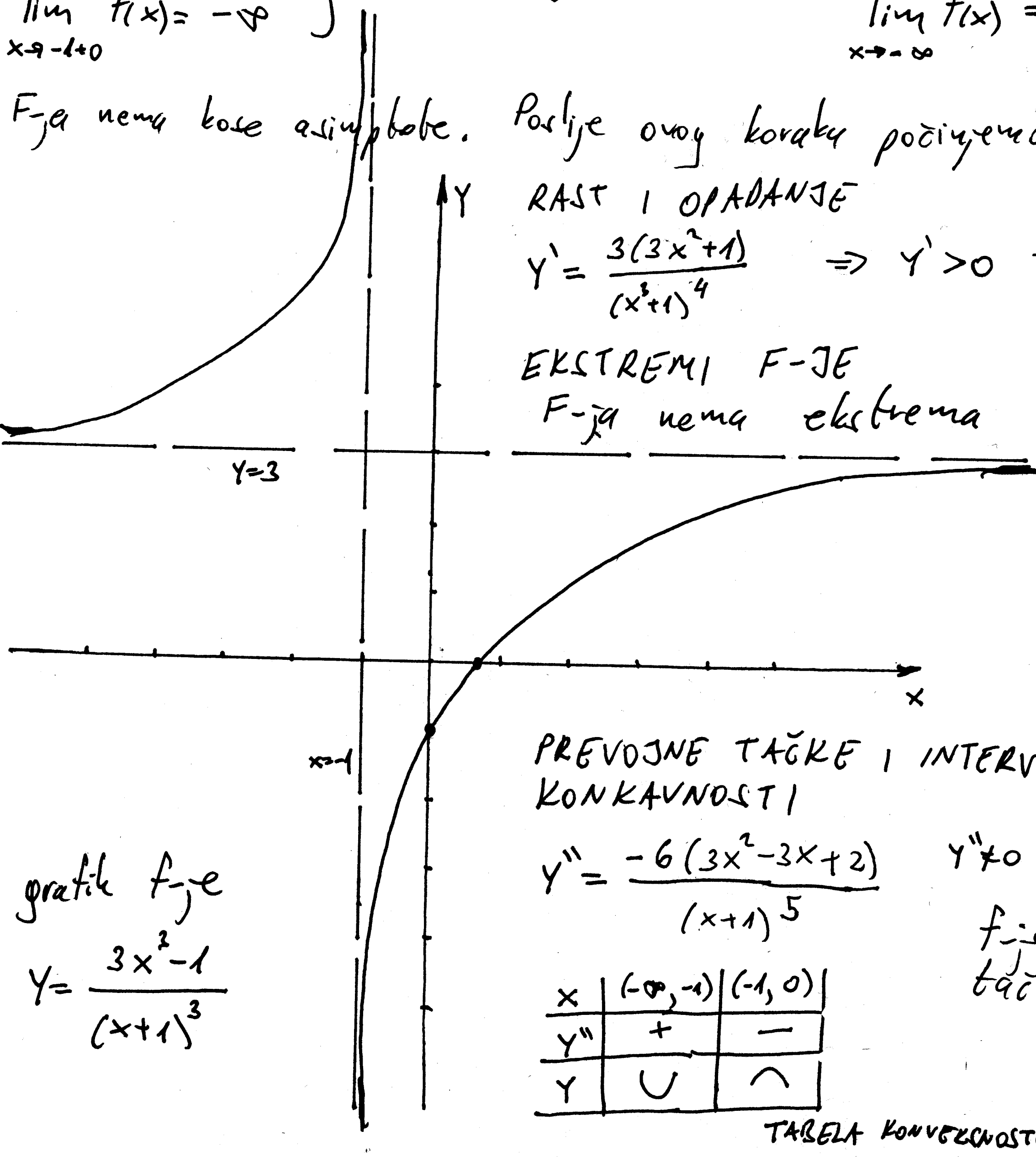
PONAŠANJE NA KRAJEVIMA INTERVALA DEFINISANOSTI I ASIMPTOTE

F-ja ima prekid za $x=-1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow x=-1 \text{ je V. A.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3\end{array}\right\}\Rightarrow y=3 \text{ je H. A.}$$

F-ja nema kose asimptote. Poslije ovog koraka počinjemo skicirati graf f-je.



RAST I OPADANJE

$$y'=\frac{3(3x^2+1)}{(x^3+1)^4}\Rightarrow y'>0\ \forall x \quad \text{f-ja uvijek raste}$$

EKSTREMI F-JE

F-ja nema ekstrema

PREVOJNE TAČKE I INTERVALI KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI

$$y''=\frac{-6(3x^2-3x+2)}{(x+1)^5} \qquad y''\neq 0 \text{ za } \forall x\in\mathcal{D}$$

f-ja nema prevojnih tački

grafik f-je

$$y=\frac{3x^3-1}{(x+1)^3}$$

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$
y''	$+$	$-$
Y	$\cup$	$\cap$

TABELA KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI

(#) Odrediti integral $\displaystyle\int \frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}\,dx$.

Rj.-upute:

$$\frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25} = \frac{x^3-3}{(x^2+5)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+5} + \frac{Cx+D}{(x^2+5)^2} \qquad /\cdot(x^2+5)^2$$

$$x^3-3 = Ax(x^2+5) + B(x^2+5) + Cx + D$$

$x^3: \quad A=1$

$x^2: \quad B=0$

$x: \quad 5A + C = 0 \Rightarrow C=-5A$

$\qquad C=-5$

$x^0: \quad 5B + D = -3$

$\Rightarrow \quad D=-3-5B$

$\qquad D=-3$

$$\int \frac{x^3-3}{x^4+10x^2+25}\,dx = \int\left(\frac{x}{x^2+5} + \frac{-5x-3}{(x^2+5)^2}\right)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} d(x^2+5)=2x\,dx \\ x\,dx = \frac{1}{2}\,d(x^2+5) \\ -5x\,dx = -\frac{5}{2}\,d(x^2+5) \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+5)}{x^2+5} - \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2+5)}{(x^2+5)^2} - 3\int \frac{dx}{(x^2+5)^2}$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{za treći integral} \\ \text{uvodimo smjenu} \\ x=\sqrt{5}\,\mathrm{tg}\,z = \sqrt{5}\,\frac{\sin z}{\cos z} \\ dx = \frac{\sqrt{5}\,dz}{\cos^2 z} \end{array} \right| = \ldots = \frac{1}{2}\ln(x^2+5) + \frac{25-3x}{10(x^2+5)} - \frac{3}{10\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{5}} + C$$

Riješiti diferencijalnu jednačinu $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$

Rj.:

Prisjetimo se jednog od načina rješavanja
Jednačina oblika

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x), \qquad \ldots(1)$$

u kojoj je lijeva strana linearna i po zavisnoj varijabli i po izvodu se naziva linearna jednačina prvog reda. Na primjer $\frac{dy}{dx} + 3xy = \sin x$ je linearna jednačina, dok npr. $\frac{dy}{dx} + 3xy^2 = \sin x$ nije.
Kako je

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{\int P(x)dx}\right) = \frac{dy}{dx} e^{\int P(x)dx} + yP(x) e^{\int P(x)dx} = e^{\int P(x)dx}\left(\frac{dy}{dx} + yP(x)\right)$$

imamo da je $e^{\int P(x)dx}$ integrativni faktor, pa opšte rješenje od (1) dobijamo iz

$$y e^{\int P(x)dx} = \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx} dx + C$$

I način:

$\int P(x)dx = \int 2x\,dx = x^2$, pa je $e^{\int P(x)dx} = e^{x^2}$ integrativni faktor
Tada

$$y e^{x^2} = \int 4x e^{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} d(x^2) = 2x\,dx \\ 4x\,dx = 2\,d(x^2) \end{array} \right| = 2\int e^{x^2} d(x^2) = 2e^{x^2} + C$$

Opšte rješenje diferencijalne jednačine je $y = 2 + Ce^{-x^2}$.

II način

$y' + 2xy = 4x$

uvodimo smjenu $y = uv$

$y' = u'v + uv'$ (u i v su dvije pomoćne f-je koje trebamo odrediti i koje zavise od x)

$u'v + uv' + 2xuv = 4x$

$u'v + u(v' + 2xv) = 4x$

(a)

$v' + 2xv = 0$

$\frac{dv}{dx} = -2xv$

$\frac{dv}{v} = -2x\,dx \quad / \int$

$\ln v = -2 \cdot \frac{x^2}{2}$

$\ln v = -x^2$

$v = e^{-x^2}$

(b)

$u'v = 4x$

$\frac{du}{dx} e^{-x^2} = 4x$

$du = 4x e^{-x^2} dx \quad / \int$

$u = 2e^{x^2} + C$

$y = uv$

$y = 2 + Ce^{-x^2}$

traženo opšte rješenje diferencijalne jednačine

(#) Riješiti diferencijalnu jednačinu $x\frac{dy}{dx} = y + x^3 + 3x^2 - 2x$.

Rj.

I način

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x) \\ y e^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x) e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\end{gathered}}$$

Naša jednačina je

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2 + 3x - 2$$

$\int P(x)\,dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x$, pa je

$e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = \frac{1}{x}$ integrativni faktor.

Tada je

$$y\frac{1}{x} = \int (x^2+3x-2)\frac{1}{x}\,dx = \int \left(x + 3 - \frac{2}{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\ln x + C_1$$

$$2y = x^3 + 6x^2 - 4x\ln x + Cx$$

opšte rješenje diferencijalne jednačine

II način

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2 + 3x - 2$$

uvodimo smjenu $y = uv$

$y' = u'v + uv'$ (gdje su u i v dvije pomoćne f-je promjenjive x, koje trebamo odrediti.

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = x^2 + 3x - 2$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = x^2 + 3x - 2$$

(a) $v' - \frac{1}{x} v = 0$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln v = \ln x$$

$$v = x$$

(b)

$$u' v = x^2 + 3x - 2$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = x^2 + 3x - 2$$

$$du = \left(x + 3 - \frac{2}{x}\right) dx$$

$$u = \frac{1}{2} x^2 + 3x - 2\ln x + C_1$$

$$y = uv$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + 3x^2 - 2x \ln x + x C_1 \quad / \cdot 2$$

$$2y = x^3 + 6x^2 - 4x \ln x + x C$$

opće rješenje
diferencijalne jednačine